

Компонент ОПОП 15.03.02 "Технологические машины и оборудование"
наименование ОПОП

направленность (профиль) /специализация
Инжиниринг технологического оборудования
Б1.В.09 (очная форма, заочная форма)
шифр дисциплины

по дисциплине **Методические указания к практическим работам**
Основы научных исследований

Разработчик (и):

Ершов М.А.

ФИО

доцент

должность

канд.техн.наук

ученая степень,
звание

Утверждено на заседании кафедры

Технологического и холодильного оборудо-
вания

наименование кафедры

протокол №_10 от 22.06.2022

Заведующий кафедрой

ТХО

подпись

В.А. Похольченко
ФИО

Мурманск
2021

Методические указания разработал – Ершов Михаил Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры Технологического и холодильного оборудования.

Рецензент: Методические указания для практических работ включают общие организационно-методические указания, перечень практических работ, список рекомендованной литературы и методические указания к практическим работам. Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы дисциплины, изложены логично. С учетом уровня подготовки методические указания могут быть рекомендованы к использованию в учебном процессе для студентов направления (специальности) **15.03.02 "Технологические машины и оборудование**

Методические указания обсуждены и одобрены на заседании кафедры Технологического и холодильного оборудования «22_» июня_ 20221 г., протокол №10_.

ОБЩИЕ ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

№ п/п	Темы практических занятий
1	2
	Очная форма
1	Обработка экспериментальных данных
2	Построение эмпирических формул
3	Приближенное дифференцирование
4	Методы обобщения результатов эксперимента. Теория подобия
5	Установление корреляционной зависимости между измеряемыми величинами

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Глазунов, Ю. Т. Моделирование процессов пищевых производств : учеб. пособие для вузов / Ю. Т. Глазунов, А. М. Ершов, М. А. Ершов ; Центр. учеб.-метод. каб. Гос. ком. РФ по рыболовству. - Москва : Колос, 2008. - 358 с.
2. Основы прикладных научных исследований : учебник для вузов / А. П. Болдин, В. А. Максимов. - Москва : Академия, 2012. – 333 с.

Дополнительная литература:

3. Вайнштейн М.З. Основы прикладных научных исследований [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Вайнштейн М.З., Вайнштейн В.М., Кононова О.В.— Электрон. текстовые данные.— Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, Поволжский государственный технологический университет, ЭБС АСВ, 2011.— 216 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/22586.html>.— ЭБС «IPRbooks».
4. Технология рыбы и рыбных продуктов : учебник для вузов / [Артюхова С. А. и др.] ; под ред. А. М. Ершова. - [2-е изд.]. - Москва : Колос, 2010. - 1063 с.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Обработка экспериментальных данных

Цель работы: научиться определять истинное значение измеряемой величины.

Задачи работы:

1. Найти истинное значение измеряемой величины.
2. С различной вероятностью определить границы, в которых заключено истинное значение.

Типичной задачей обработки результатов эксперимента является оценка истинного значения измеренной величины. Для этого проводится обычно серия её измерений.

Оценка истинного значения величины a зависит от способа и точности измерений. Если все результаты x_1, x_2, \dots, x_n измерены с одинаковой точностью, то функция φ представляет собой среднее арифметическое \bar{x} результатов измерений x_1, x_2, \dots, x_n , т.е.

$$a \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

Отклонение средних арифметических от точных значений измеряемых величин требует оценки точности замены a на \bar{x} . Доверительный интервал характеризует точность полученного результата, а доверительная вероятность - его надежность.

Определение границ доверительного интервала сводится к нахождению величины μ , для которой с выбранной вероятностью P выполняется неравенство:

$$|a - \bar{x}| \leq \mu \quad (2)$$

или

$$\bar{x} - \mu \leq a \leq \bar{x} + \mu.$$

Величина $\mu \varepsilon$ определяет доверительные границы $\bar{x} - \mu, \bar{x} + \mu$ и зависит от заданной доверительной вероятности P . Обычно P выбирается как 0,95; 0,99 или 0,999. Число μ тогда определяет точность приближенного равенства $a \approx \bar{x}$.

Стандартная процедура нахождения μ при заданной доверительной вероятности P основана на, так называемом, законе распределения случайной величины Стьюдента и состоит в следующем.

По известным результатам измерений x_1, x_2, \dots, x_n и полученному по формуле (1) среднему арифметическому \bar{x} находим величину σ - среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (3)$$

Находим также величину $k = n-1$. Используя таблицу распределения Стьюдента (табл. 1) по известным значениям k и P , определяем число $t = t(P, k)$. Половина длины доверительного интервала μ выражается теперь как $\mu = t\sigma/\sqrt{n}$, а доверительный интервал, за пределы которого с вероятностью P величина a не выходит, имеет границы $\bar{x} \pm \mu$.

Часто решается и обратная задача: по заданной величине доверительного интервала 2μ найти доверительную вероятность P . Для этого по формуле (3) вычисляют величину σ , определяют число $t = \mu\sqrt{n}/\sigma$ и по значениям t и k находят в табл. 1 соответствующую вероятность P .

Таблица 1. Распределение Стьюдента. Значения $t = t(P, k)$

$k \setminus P$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
18	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
25	1,708	2,060	2,484	2,787	3,725
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
35	1,689	2,030	2,437	2,724	3,591
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
45	1,679	2,014	2,412	2,689	3,522
50	1,676	2,008	2,403	2,677	3,497
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
70	1,667	1,995	2,381	2,648	3,436
80	1,664	1,990	2,374	2,639	3,416
90	1,662	1,987	2,368	2,632	3,401
100	1,660	1,984	2,364	2,626	3,391
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Пример 1. Произведено 10 измерений одного и того же экземпляра рыбы. Получены следующие результаты:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i (М М)	120	122	121	118	120	116	124	122	121	120

Требуется оценить истинное значение длины экземпляра и найти границы, в которых с вероятностью $P = 0,9$ заключено это значение. Повторить вычисления для $P_1 = 0,99$ и $P_2 = 0,999$.

Решение. По формуле (1) находим среднее арифметическое измеренных значений:

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 120,4.$$

По формуле (3) вычисляем

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}{9}} = 0,703$$

Для $k = 9$ и $P = 0,9$ в табл. 1 находим $t(0,9; 9) = 1,833$. Умножая t на σ и на \sqrt{n} имеем $\mu \approx 1,3$. Следовательно, доверительные границы, в которых с вероятностью $P = 0,9$ заключено неизвестное значение длины, выражаются как $\bar{x} - \mu = 119,1$; $\bar{x} + \mu = 121,7$.

Для $P_1 = 0,99$ находим $t(0,99; 9) = 3,250$. Отсюда $\mu \approx 2,3$ и $\bar{x} - \mu = 118,1$; $\bar{x} + \mu = 122,7$.

Для $P_2 = 0,999$ имеем: $t(0,999; 9) = 4,781$, $\mu \approx 2,3$; $\bar{x} - \mu = 116,7$; $\bar{x} + \mu = 124,1$.

Приведенный пример выразительно показывает, как расширяются границы доверительного интервала с повышением требований к надёжности оценки.

Доказано, что при $n \rightarrow \infty$ величина $\sigma \rightarrow 0$. Поэтому также и $\mu = t\sigma/\sqrt{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так что с увеличением числа измерений n увеличивается и точность приближенного равенства $a \approx \bar{x}$. Вывод этот не следует противопоставлять тому очевидному факту, что для увеличения точности окончательных результатов необходимо в первую очередь, увеличивать точность отдельных измерений.

Задание.

Требуется оценить истинное значение длины экземпляра и найти границы, в которых с вероятностью $P = 0,9$ заключено это значение. Повторить вычисления для $P_1 = 0,99$ и $P_2 = 0,999$.

Варианты заданий:

Вариант	Количество измерений / значение										
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x_i (мм)	118	116	119	117	120	116	121	119	121	120
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	x_i (мм)	108	105	109	108	109	106	102	108	111	
	i	1	2	3	4	5	6	7	8		
3	x_i (мм)	157	154	159	158	158	157	152	156		
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	x_i (мм)	109	107	111	108	110	104	102	108	111	110
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
5	x_i (мм)	129	134	130	129	130	137	138	139	132	
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
6	x_i (мм)	103	101	105	102	106	100	102	104	103	
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	x_i (мм)	108	105	113	108	111	105	103	104	110	110
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
8	x_i (мм)	107	103	110	109	111	105	103	109	112	
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	x_i (мм)	101	109	113	111	113	108	105	109	112	113
	i	1	2	3	4	5	6	7	8		
10	x_i (мм)	105	102	107	106	108	105	104	109		
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	x_i (мм)	100	108	112	110	111	107	104	108	111	112
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	x_i (мм)	120	118	121	119	122	118	123	122	123	122
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	x_i (мм)	108	104	111	110	112	106	104	110	113	112
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14	x_i (мм)	106	102	109	110	111	104	102	108	111	109
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Вопросы для самопроверки

Что такое систематическая погрешность измерений?

Дайте определение случайной погрешности?

Что такое грубая ошибка?

Дайте определение для понятия дисперсии.

В чем состоит правило трех сигм?

Какая область называется доверительным интервалом?

Что называется доверительными границами погрешности результата измерений?

Дайте определение доверительной вероятности.

Что называется уровнем значимости?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

Построение эмпирических формул

Цель работы: изучить методы построения эмпирических формул.

Задачи работы:

- 1. Изучить прием построения эмпирической формулы методом выбранных точек.**
- 2. Изучить метод построения эмпирических формул с использованием логарифмической и полулогарифмической шкал.**

Рассмотренный в предыдущей практической работе метод наименьших квадратов по сути своей является одним из методов построения *эмпирических формул*, т.е. аналитических зависимостей, описывающих результаты наблюдений. Задача построения эмпирической формулы возникает тогда, когда функциональная зависимость между переменными величинами уже известна и по результатам наблюдений необходимо определить постоянные величины в формуле, отражающей эту зависимость. Табличные данные обычно стремятся заменить наиболее простой формулой, однако уже это позволяет в дальнейшем использовать методы математического анализа.

Удачный выбор аналитического выражения зависит от искусства исследователя. Общий вид формулы подсказывает иногда графическое расположение табличных данных. Совершенно ясно, однако, что определить тип формулы однозначно невозможно.

Большой класс функций можно с достаточной точностью приближать многочленами. Но чем сложнее функция, тем выше должна быть степень аппроксимирующего многочлена. Коэффициенты в такой формуле теряют физический смысл, а сама она становится неудобной в использовании. В связи с этим часто применяются другие элементарные функции: логарифмическая, степенная, показательная, дробно-линейная и иные зависимости, достоинство которых состоит в их краткости. Именно такого рода зависимостями мы и будем заниматься в данном параграфе.

Построить аналитическую зависимость по нескольким точкам обычно нетрудно. Однако, подавление „информационного шума”, вызванного ошибками наблюдений, требует большого числа экспериментальных данных. Этим и объясняется проблема выбора конкретной формулы.

Эмпирическая формула не может претендовать на глубокую обобщающую роль. Однако, в рамках рассматриваемого явления такая зависимость может быть весьма полезна.

Существует ряд приёмов нахождения эмпирических формул. Наиболее простой из них - *метод построения линейной функции*. Состоит он в следующем.

Пусть известны табличные значения x_i и y_i ($i=1, 2, \dots, n$) некоторой табличной функции. Если точки $M_i(x_i, y_i)$ располагаются на координатной плоскости Oxy примерно на прямой линии, то можно принять, что

$$y = ax + b, \tag{1}$$

где $a, b = \text{const}$.

Наилучшее расположение прямой по отношению к системе точек M_i можно подобрать даже графически, используя прозрачную линейку. Параметры a и b определяются затем на основе измерения координат двух достаточно отдалённых друг от друга точек, принадлежащих этой прямой. Подставляя полученные координаты в (1), приходим к системе из двух линейных алгебраических уравнений, решение которой и даёт искомые параметры. Этот приём построения эмпирической формулы называется *методом выбранных*

точек. Выбранные на прямой точки могут системе данных и не принадлежать. Важно, чтобы сама прямая отвечала этой системе наилучшим образом.

Метод выбранных точек прост, но точность его невелика. Для повышения надежности результатов здесь также можно применять метод наименьших квадратов.

Часто точки $M_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) на одной прямой не лежат. Во многих случаях можно ввести тогда новые координаты X, Y так, чтобы в новой координатной системе преобразованные точки $N_i(X_i, Y_i)$ оказались близкими к прямой вида:

$$Y = AX + B, \quad A, B = \text{const.} \quad (2)$$

Такое „перенесение” экспериментальных результатов на плоскости с одного места на другое реализуется путём изменения масштаба используемой шкалы.

Введение новой координатной системы в общем случае основано на преобразовании исходной равномерной шкалы Ox в новую шкалу OX согласно формуле: $x=f(X)$, где x и X - отвечающие друг другу значения переменной в исходной и новой координатных системах.

Если функция $f(X)$ линейна, то новая шкала OX также будет равномерной. Однако, если принять функцию f , например, как $f(X) = \lg X$, то преобразование $x = \lg X$ приводит уже к неравномерной шкале OX , которую называют *логарифмической шкалой*. Размещая эти шкалы на параллельных прямых (рис. 1), можно заметить, что прямая, к ним перпендикулярная, пересекает ось OX в точке $X = 10^x$, а ось Ox - в точке $x = \lg X$.

На таких преобразованиях шкал и основано построение большинства эмпирических формул. К виду (2) хорошо приводятся, например, показательная и степенная зависимости.

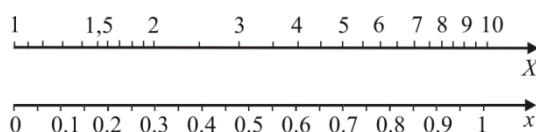


Рис. 1 Равномерная (внизу) и логарифмическая (вверху) шкалы

Степенная зависимость имеет вид:

$$y = ax^b, \quad (3)$$

где $a, b = \text{const}, x, y > 0$.

Логарифмируя (3), имеем

$$\lg y = b \lg x + \lg a.$$

Применяя новые переменные

$$X = \lg x, \quad Y = \lg y,$$

получим

$$Y = AX + B, \quad (4)$$

где $A=b, B=\lg a$.

Итак, если точки $N_i(\lg x_i, \lg y_i)$ лежат в плоскости OXY на одной прямой, то можно использовать степенную зависимость (3). Для построения прямой (4) рекомендуют использовать логарифмическую бумагу. Коэффициенты A и B можно определять рассмотренным выше способом. Последующее обратное преобразование координат приводит к искомому уравнению (3).

В практике применяются как одинарная, так и двойная логарифмические шкалы. С их использованием строятся соответствующие координатные системы, образующие логарифмические сетки. *Одинарная* (или, как её ещё называют, *полулогарифмическая*) система координат на одной из осей содержит равномерную шкалу, на другой - логарифмическую.

Двойная же логарифмическая координатная система имеет логарифмическую шкалу на обеих осях.

Примеры использования этих шкал представлены на рис. 2 и 3. Первый из них содержит график функции $S = \frac{1}{4}\pi x^2$, представленный в двойной логарифмической системе, второй - график функции $y = e^{-\frac{1}{2}\tau}$ в системе полулогарифмической. В каждом случае на графике мы имеем дело с прямой линией, хотя первая функция степенная, вторая - показательная. Преобразование функции $S(x)$ было реализовано по формулам (3), (4), а способ преобразования функции $y(\tau)$ будет рассматриваться далее.

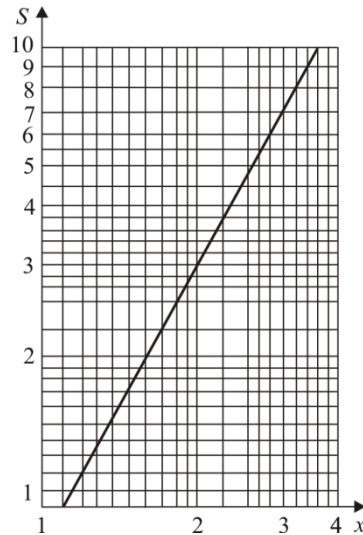


Рис. 2. График функции $S = \frac{1}{4}\pi x^2$ в двойной логарифмической шкале

Представленные примеры иллюстрируют общую тенденцию: двойные логарифмические шкалы применяются для преобразования степенных функций, полулогарифмические - показательных.

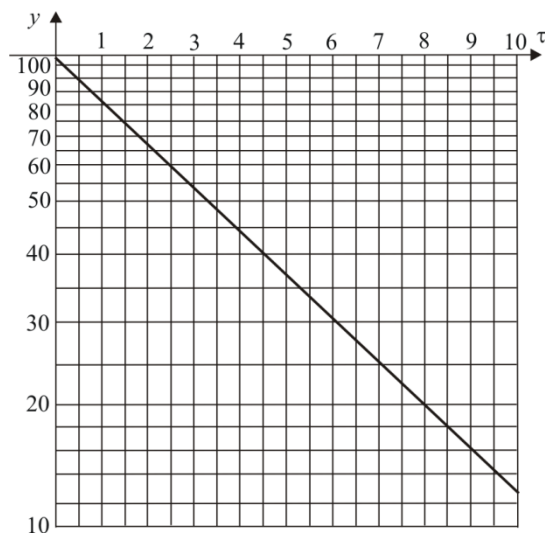


Рис. 3. График функции $y = 100e^{-\frac{1}{5}\tau}$ в полулогарифмической шкале

Пример. При изучении зависимости влагосодержания капли сгущенного молока от времени в процессе распылительной сушки была получена следующая таблица результатов наблюдений.

τ	0,6	0,7	0,9	1	1,4	2,3	3	3,6	5	6,4	8,3	10,4	20,5
W	26,1	25,9	25,1	22,4	19,5	14,1	12,4	11,8	9,8	7,9	7	6,3	4,2

Здесь τ - время сушки (*сек*), W – влагосодержание капли молока (*кг влаги/кг сухого вещества*). Найти эмпирическую формулу, описывающую полученные результаты:
 $W = a \cdot \tau^b$.

Решение.

Строим диаграмму с данными по табличным данным.

Кинетика сушки молока

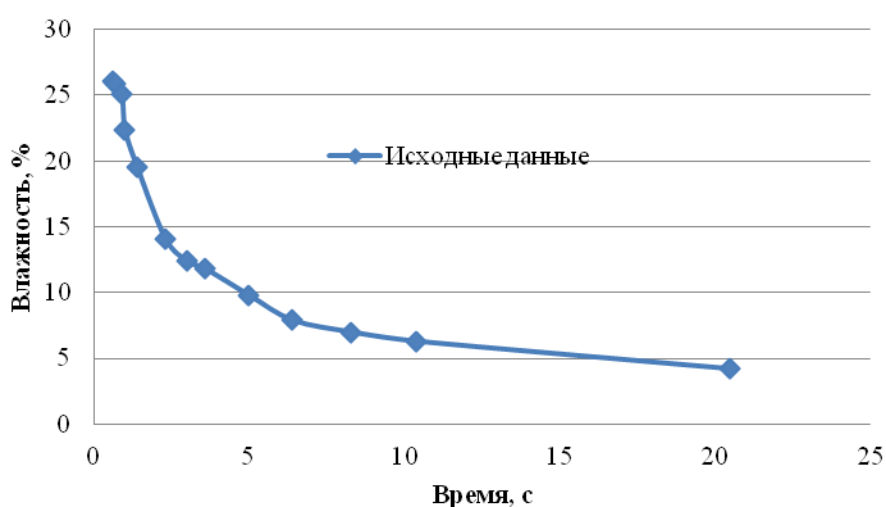


Рис.1 – Исходные данные.

На полученной диаграмме меняем параметры осей: W и τ . Нужно выбрать в формате оси (правая кнопка мыши по оси на диаграмме) логарифмическую шкалу.

После преобразования получаем данные в виде двойной логарифмической шкалы (рис.2).

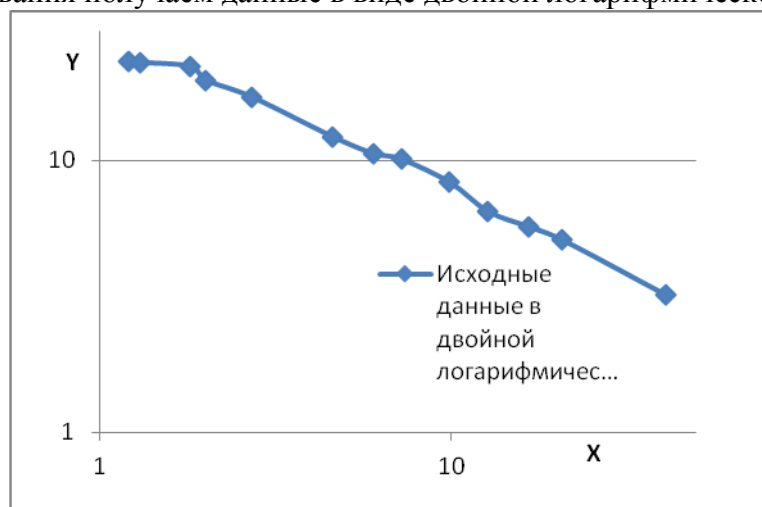


Рис.2 – Исходные данные в двойной логарифмической шкале

В двойной логарифмической шкале результаты наблюдений можно считать близкими к прямой линии. Используя метод выбранных точек, наносим отрезок AB на точки исходных данных. Отрезок должен максимально приближен к точкам исходным данным. Для удобства будем использовать начальные (точка A) и конечные координаты (точка B) диапазона начальных данных: $A(0,6; 26,1)$; $B(20,5; 4,2)$. Наносим отрезок на диаграмму с исходными данными – рис. 3. На рисунке 3.а отрезок AB располагается ниже исходных данных. Нужно корректировать координаты точек A или B . Целесообразно изменить координату Y для точки A . После корректировки отрезок максимально приближен к исходным данным рис. 3.б, новые координаты отрезка: $A(0,6; 30,0)$; $B(20,5; 4,2)$.

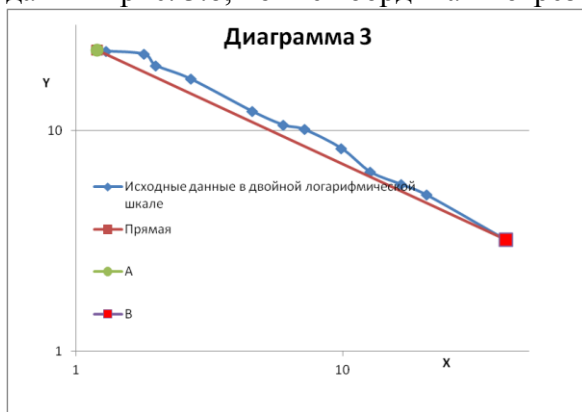


Рис.3.а - До корректировки

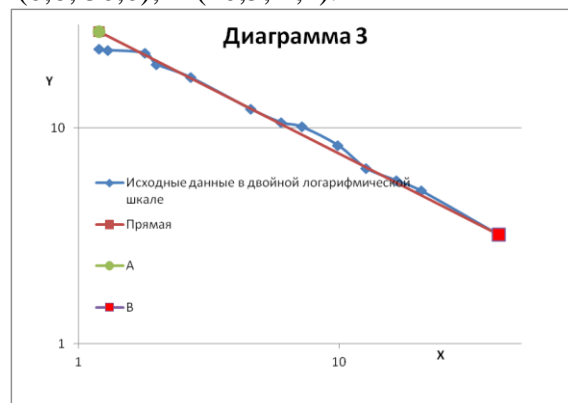


Рис.3.б - После корректировки.

Рис. 3 – Исходные данные в двойной логарифмической шкале и отрезок AB

Для нахождения коэффициентов в формуле (3) на основе выражения $\lg y = b \lg x + \lg a$, используя координаты полученного отрезка $A(0,6; 30,0)$; $B(20,5; 4,2)$, составим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} b \lg 0,6 + \lg a = \lg 30 \\ b \lg 20,5 + \lg a = \lg 4,2 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим значения: $a=22,542$; $b=-0,557$. Подставляем данные значения в общее уравнение степенной функции $W = a \cdot \tau^b$, которая свойственна для эмпирических формул, полученных с помощью двойных логарифмических шкал.

Формула (3) записывается теперь как $W = 22,542 \cdot \tau^{-0,557}$

Строим расчетную кривую по полученной формуле, используя данные τ из условия задачи (рис.4)

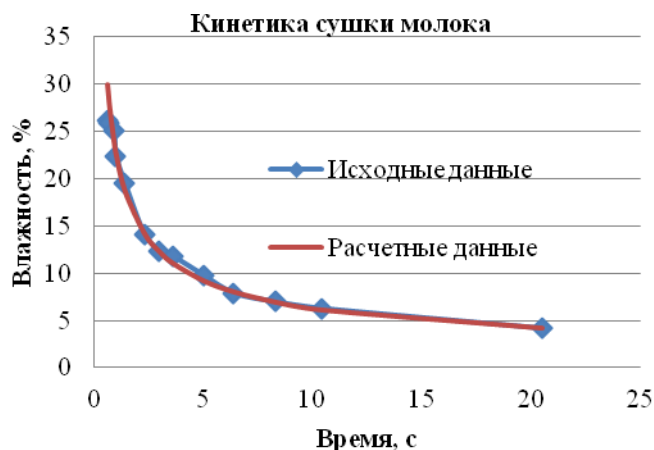


Рис. 4 – Исходные и расчетные значения.

Задание. При изучении зависимости влагосодержания капли сгущенного молока от времени в процессе распылительной сушки была получена следующая таблица результатов наблюдений. Здесь τ - время сушки (сек), W – влагосодержание капли молока (кг влаги/кг сухого вещества). Найти эмпирическую формулу, описывающую полученные результаты. Построить графики изменения влажности W от времени τ по исходным данным и по полученной эмпирической формуле.

№	τ	0,6	0,7	0,9	1,0	1,4	2,3	3,0	3,6	5,0	6,4	8,3	10,4	20,5
1	W	24,3	24,0	23,3	20,7	18,0	12,8	11,1	10,6	8,7	6,8	6,0	5,4	3,4
2		25,4	25,2	24,4	21,7	18,8	13,4	11,7	11,1	9,1	7,2	6,3	5,6	3,5
3		27,7	27,5	26,6	23,6	20,5	14,6	12,7	12,1	10,0	7,8	6,8	6,1	3,8
4		28,9	28,6	27,8	24,6	21,4	15,3	13,3	12,6	10,4	8,1	7,1	6,4	4,0
5		30,0	29,8	28,9	25,6	22,2	15,9	13,8	13,1	10,8	8,5	7,4	6,6	4,2
6		31,2	30,9	30,0	26,6	23,1	16,5	14,3	13,6	11,2	8,8	7,7	6,9	4,3
7		32,3	32,1	31,1	27,6	23,9	17,1	14,8	14,1	11,6	9,1	8,0	7,1	4,5
8		33,5	33,2	32,2	28,6	24,8	17,7	15,4	14,6	12,0	9,4	8,3	7,4	4,6
9		34,7	34,4	33,3	29,6	25,7	18,3	15,9	15,2	12,5	9,8	8,6	7,7	4,8
10		38,1	37,8	36,6	32,5	28,2	20,1	17,5	16,7	13,7	10,7	9,4	8,4	5,3
11		39,3	38,9	37,7	33,5	29,1	20,7	18,0	17,2	14,1	11,1	9,7	8,7	5,4
12		39,5	39,1	37,9	33,7	29,3	20,9	18,2	17,4	14,3	11,3	9,9	8,9	5,6
13		25	24,7	24	21,4	18,7	13,5	11,8	11,3	9,4	7,5	6,7	6,1	4,1
14		26,1	25,9	25,1	22,4	19,5	14,1	12,4	11,8	9,8	7,9	7	6,3	4,2
15		28,4	28,2	27,3	24,3	21,2	15,3	13,4	12,8	10,7	8,5	7,5	6,8	4,5
16		29,6	29,3	28,5	25,3	22,1	16	14	13,3	11,1	8,8	7,8	7,1	4,7
17		30,7	30,5	29,6	26,3	22,9	16,6	14,5	13,8	11,5	9,2	8,1	7,3	4,9
18		31,9	31,6	30,7	27,3	23,8	17,2	15	14,3	11,9	9,5	8,4	7,6	5
19		33	32,8	31,8	28,3	24,6	17,8	15,5	14,8	12,3	9,8	8,7	7,8	5,2
20		34,2	33,9	32,9	29,3	25,5	18,4	16,1	15,3	12,7	10,1	9	8,1	5,3
21		35,4	35,1	34	30,3	26,4	19	16,6	15,9	13,2	10,5	9,3	8,4	5,5

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3 Приближенное дифференцирование

Цель работы: изучить метод применения численного дифференцирования.

Задачи работы:

- 1. Изучить последовательность использования формул для численного дифференцирования производных первого и второго порядка.**
- 2. Научиться применять формулы численного дифференцирования, выполнив расчетное задание.**

В разработке и реализации технологий большое значение имеет правильный выбор скоростей изменения характерных величин и градиентов их пространственного распределения. Например, правильный выбор режима обезвоживания продукта основан на исследовании скорости сушки материала; определение количества соли и фенолов, содержащихся в продукте, - от скорости насыщения его этими веществами. Информация о температурных и концентрационных градиентах в рабочей среде позволяет судить об интенсивности протекания технологического процесса или о степени его отклонения от равновесных условий и т.п.

Получение подобного рода информации из таблиц наблюдений основывается на применении методов численного дифференцирования.

Численное дифференцирование позволяет для функций, заданных таблично, вычислять производные различных порядков, применяя, так называемые, *формулы численного дифференцирования*. Их вывод основан на замене табличной функции $f(x)$ интерполирующей функцией $P(x)$ с последующим дифференцированием этого равенства необходимое число раз:

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + R(x), \\ f'(x) &= P'(x) + R'(x), \\ f^{(k)}(x) &= P^{(k)}(x) + R^{(k)}(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $R(x)$ – остаточный член интерполяционной формулы.

Появление остаточного члена в выражениях (1) объясняется отклонением функции $f(x)$ от $P(x)$ в промежутках между табличными значениями. Задача численного дифференцирования может решаться как при равноотстоящих значениях аргумента в таблице исходных данных, так и для таблиц с произвольным шагом.

Наиболее наглядный вид имеют формулы численного дифференцирования, когда они записаны для таблиц с постоянным шагом h . В этом случае промежуток дифференцирования разбивается точками x_k следующим образом:

$$x_k = x_0 + kh, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

В этих точках $y_k = f(x_k)$.

Формулы получаются за счёт интерполирования табличных значений функции многочленом Лагранжа, записанным для равноотстоящих узлов. Производная в некоторой точке выражается в этом случае через значения табличной функции в самой точке и в её окрестности. Существует множество таких формул, поскольку как окрестность, так и положение расчётной точки в этой окрестности можно выбирать по-разному. Наиболее простые и точные выражения получаются для чётных степеней многочлена Лагранжа, отвечающих нечётному числу табличных значений функции $f(x)$. Рассмотрим некоторые из них.

Производные первого порядка. Степень многочлена Лагранжа $n=2$ (используются три табличные значения функции). Формулы принимают вид:

$$\begin{aligned} y'_0 &= \frac{1}{2h}[-3y_0 + 4y_1 - y_2], \\ y'_1 &= \frac{1}{2h}[y_2 - y_0], \end{aligned} \tag{2}$$

$$y'_2 = \frac{1}{2h} [y_0 - 4y_1 + 3y_2].$$

Первая и третья из этих формул могут использоваться для вычисления односторонних производных в начале и в конце таблицы, *вторая* - для внутренних точек.

Пусть теперь $n=4$ (используется пять точек). Имеем:

$$\begin{aligned} y'_0 &= \frac{1}{12h} [-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4], \\ y'_1 &= \frac{1}{12h} [-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4], \\ y'_2 &= \frac{1}{12h} [y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4], \\ y'_3 &= \frac{1}{12h} [-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4], \\ y'_4 &= \frac{1}{12h} [3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4]. \end{aligned} \quad (3)$$

Первая и вторая из этих формул могут использоваться для вычисления односторонних производных в первой и во второй ячейке таблицы, *третья* формула - для внутренних точек. *Четвертая и пятая* формулы используются для вычисления производных в предпоследней и последней ячейках таблицы.

Производные второго порядка вычисляются по следующим формулам.

Пусть $n = 2$ (используются три точки):

$$\begin{aligned} y''_0 &= \frac{1}{h^2} [y_0 - 2y_1 + y_2], \\ y''_1 &= \frac{1}{h^2} [y_0 - 2y_1 + y_2], \\ y''_2 &= \frac{1}{h^2} [y_0 - 2y_1 + y_2]. \end{aligned} \quad (4)$$

Для $n=4$ (пять точек) имеем:

$$\begin{aligned} y''_0 &= \frac{1}{24h^2} [70y_0 - 208y_1 + 228y_2 - 112y_3 + 22y_4], \\ y''_1 &= \frac{1}{24h^2} [22y_0 - 40y_1 + 12y_2 + 8y_3 - 2y_4], \\ y''_2 &= \frac{1}{24h^2} [-2y_0 + 32y_1 - 60y_2 + 32y_3 - 2y_4], \\ y''_3 &= \frac{1}{24h^2} [-2y_0 + 8y_1 + 12y_2 - 40y_3 + 22y_4], \\ y''_4 &= \frac{1}{24h^2} [22y_0 - 112y_1 + 228y_2 - 208y_3 + 70y_4]. \end{aligned} \quad (5)$$

Задача численного дифференцирования обладает той особенностью, что с ростом порядка производной быстро снижается точность результатов. Действительно, при замене табличной функции интерполирующей функцией (2) считается, что остаточный член $R(x)$ невелик. Однако из этого не следует, что и величина производной $R^{(k)}(x)$ также остаётся малой. Производные от малых функций могут быть весьма большими (близость функций $f(x)$ и $P(x)$ по ординатам не гарантирует малого отклонения друг от друга касательных к этим кривым, проведённым при одинаковых значениях аргумента). Поэтому для получения производных выше второго порядка численное дифференцирование применяется редко.

Пример 1. При исследовании проницаемости для копильных веществ целлофановых и кутизиновых колбасных оболочек был проведён эксперимент с колбасными моделями. Колбасные оболочки наполнили дистиллированной водой и подвергли воздействию копильной среды в течение 60-ти часов. Через каждые 4 часа в объёме колбасных моделей проводили измерение концентрации копильных веществ. В табл. 1 представлены сглаженные результаты, полученные для карбонильных соединений. Время τ , изме-

ренное в часах, записано в колонке 1. В колонках 2 и 3 представлены концентрации карбонильных соединений (ммоль/100 мл) для моделей с целлофановой (c_1) и куртизиновой (c_2) оболочками.

Найти скорость насыщения моделей карбонильными соединениями в моменты измерений. Определить тип выпуклости концентрационных кривых через 20 и 56 часов после начала насыщения.

Решение. Под скоростью насыщения мы будем понимать величину приращения концентрации карбонильных веществ в единице объёма модели в единицу времени, т.е. величину производных $dc_i/d\tau$ ($i=1, 2$).

Таблица 1

τ	c_1	c_2	$\partial c_1 / \partial \tau$	$\partial c_2 / \partial \tau$
1	2	3	4	5
0	0	0	1,242	0,985
4	4,58	3,70	1,062	0,868
8	8,57	6,96	0,939	0,764
12	12,1	9,82	0,813	0,663
16	15,1	12,3	0,710	0,598
20	17,8	14,6	0,625	0,525
24	20,1	16,5	0,533	0,446
28	22,1	18,2	0,475	0,398
32	23,9	19,7	0,410	0,365
36	25,4	21,1	0,325	0,310
40	26,8	22,2	0,310	0,273
44	27,9	23,3	0,273	0,252
48	29,0	24,2	0,254	0,210
52	29,9	25,0	0,196	0,188
56	30,6	25,7	0,163	0,163
60	31,2	26,3	0,152	0,138

Для получения производных использованы формулы (3). Результаты расчёта представлены в колонках 4 и 5 табл. 1. Расчёты проводились следующим образом. Например, первые три числа в колонке 4 получены с помощью первых трёх формул (шаг таблицы $n=4$) как:

$$\left. \frac{dc_1}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{12 \cdot 4} (-25 \cdot 0 + 48 \cdot 4,58 - 36 \cdot 8,57 + 16 \cdot 12,1 - 3 \cdot 15,1) \approx 1,242,$$

$$\left. \frac{dc_1}{d\tau} \right|_{\tau=4} = \frac{1}{12 \cdot 4} (-3 \cdot 0 - 10 \cdot 4,58 + 18 \cdot 8,57 - 6 \cdot 12,1 + 15,1) \approx 1,062,$$

$$\left. \frac{dc_1}{d\tau} \right|_{\tau=8} = \frac{1}{12 \cdot 4} (0 - 8 \cdot 4,58 + 8 \cdot 12,1 - 15,1) \approx 0,939$$

Эти числа и определяют скорость изменения карбонильных соединений в модели с целлофановой оболочкой в начале процесса, через 4 и 8 часов соответственно.

Примеры использования формул (3) приведены на рисунках 1-6.

Рис.1 - Пример использования первой формулы (3)

СУММ						
=1/(12*4)*(-3*C3-10*C4+18*C5-6*C6+C7)						
	A	B	C	D	E	F
1		τ	c_1	c_2	$\partial c_1 / \partial \tau$	$\partial c_2 / \partial \tau$
2		1	2	3	4	5
3	0	0	0	0	1,242	0,985
4	1	4	4,58	3,7	=1/(12*4)*(-3*C3-	0,868
5	2	8	8,57	6,96	0,939	0,764
6	3	12	12,1	9,82	0,813	0,663
7	4	16	15,1	12,3	0,710	0,598
8	5	20	17,8	14,6	0,625	0,525

Рис. 2 - Пример использования второй формулы (3)

СУММ						
=1/(12*4)*(C3-8*C4+8*C6-C7)						
	A	B	C	D	E	F
1		τ	c_1	c_2	$\partial c_1 / \partial \tau$	$\partial c_2 /$
2		1	2	3	4	5
3	0	0	0	0	1,242	
4	1	4	4,58	3,7	1,062	
5	2	8	8,57	6,96	=1/(12*4)*(C3-8*C	
6	3	12	12,1	9,82	0,813	
7	4	16	15,1	12,3	0,710	
8	5	20	17,8	14,6	0,625	

Рис. 3 - Пример использования третьей формулы (3)

СУММ						
=1/(12*4)*(C4-8*C5+8*C7-C8)						
	A	B	C	D	E	F
1		τ	c_1	c_2	$\partial c_1 / \partial \tau$	$\partial c_2 / \partial$
2		1	2	3	4	5
3	0	0	0	0	1,242	
4	1	4	4,58	3,7	1,062	
5	2	8	8,57	6,96	0,939	
6	3	12	12,1	9,82	=1/(12*4)*(C4-8*C	
7	4	16	15,1	12,3	0,710	
8	5	20	17,8	14,6	0,625	
9	6	24	20,1	16,5	0,533	

Рис. 4 - Пример использования третьей формулы (3) в последующих ячейках

СУММ						
=1/(12*4)*(-C14+6*C15-18*C16+10*C17+3*C18)						
	A	B	C	D	E	F
1		τ	c_1	c_2	$\partial c_1 / \partial \tau$	$\partial c_2 / \partial \tau$
2		1	2	3	4	5
3	0	0	0	0	1,242	0,985
4	1	4	4,58	3,7	1,062	0,868
5	2	8	8,57	6,96	0,939	0,764
6	3	12	12,1	9,82	0,813	0,663
7	4	16	15,1	12,3	0,710	0,598
8	5	20	17,8	14,6	0,625	0,525
9	6	24	20,1	16,5	0,533	0,446
10	7	28	22,1	18,2	0,475	0,398
11	8	32	23,9	19,7	0,410	0,365
12	9	36	25,4	21,1	0,363	0,310
13	10	40	26,8	22,2	0,310	0,273
14	11	44	27,9	23,3	0,273	0,252
15	12	48	29	24,2	0,254	0,210
16	13	52	29,9	25	0,198	0,188
17	14	56	30,6	25,7	=1/(12*4)*(-C14+d	0,163
18	15	60	31,2	26,3	0,152	0,138

Рис. 5 - Пример использования четвертой формулы (3) в предпоследней ячейке

СУММ						
=1/(12*4)*(3*C14-16*C15+36*C16-48*C17+25*C18)						
	A	B	C	D	E	F
		τ	c_1	c_2	$\partial c_1 / \partial \tau$	$\partial c_2 / \partial \tau$
		1	2	3	4	5
3	0	0	0	0	1,242	0,985
4	1	4	4,58	3,7	1,062	0,868
5	2	8	8,57	6,96	0,939	0,764
6	3	12	12,1	9,82	0,813	0,663
7	4	16	15,1	12,3	0,710	0,598
8	5	20	17,8	14,6	0,625	0,525
9	6	24	20,1	16,5	0,533	0,446
10	7	28	22,1	18,2	0,475	0,398
11	8	32	23,9	19,7	0,410	0,365
12	9	36	25,4	21,1	0,363	0,310
13	10	40	26,8	22,2	0,310	0,273
14	11	44	27,9	23,3	0,273	0,252
15	12	48	29	24,2	0,254	0,210
16	13	52	29,9	25	0,198	0,188
17	14	56	30,6	25,7	0,156	0,163
18	15	60	31,2	26,3	=1/(12*4)*(3*C14	0,138

Рис. 6 - Пример использования пятой формулы (3) в последней ячейке

Тип выпуклости концентрационных кривых определяет в рассматриваемых точках знак производных второго порядка. Для их нахождения использованы формулы (5). Порядок применения формул (5) аналогичен применению формул (3). Поскольку точка $\tau=20$ находится в середине таблицы, для расчёта вторых производных использована третья из этих формул. Для $\tau=56$ необходимо использовать четвёртую формулу. Проведя вычисления, получим:

$$\left. \frac{d^2 c_1}{d\tau^2} \right|_{\tau=20} \approx -2,6 \cdot 10^{-2}, \quad \left. \frac{d^2 c_2}{d\tau^2} \right|_{\tau=20} \approx -2,7 \cdot 10^{-2},$$

$$\left. \frac{d^2 c_1}{d\tau^2} \right|_{\tau=56} \approx -6,8 \cdot 10^{-3}, \quad \left. \frac{d^2 c_2}{d\tau^2} \right|_{\tau=56} \approx -6,3 \cdot 10^{-3}.$$

Отрицательные значения второй производной свидетельствуют о том, что концентрационные кривые как в середине, так и в конце таблицы, обращены выпуклостью вверх. На всём промежутке исследования концентрация возрастает, а первая производная по времени (т.е. скорость насыщения) убывает. Всё это свидетельствует о том, что физический процесс имеет свойство «затухания», которое выражается в асимптотическом приближении каждой концентрационной кривой к некоторой постоянной величине, характеризующей полную насыщенность модели.

Задание. Принимая условия примера, выполнить расчет задачи, используя формулы (3) и (5). Варианты заданий представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Варианты заданий.

Вариант	Концентрация, ммоль/100 мл	Время, часы															
		0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
1	c_1	0,00	5,78	9,77	13,30	16,30	19,00	21,30	23,30	25,10	26,60	28,00	29,10	30,20	31,10	31,80	32,40
	c_2	0,00	4,90	8,16	11,02	13,50	15,80	17,70	19,40	20,90	22,30	23,40	24,50	25,40	26,20	26,90	27,50
2	c_1	0,00	5,38	9,37	12,90	15,90	18,60	20,90	22,90	24,70	26,20	27,60	28,70	29,80	30,70	31,40	32,00
	c_2	0,00	4,50	7,76	10,62	13,10	15,40	17,30	19,00	20,50	21,90	23,00	24,10	25,00	25,80	26,50	27,10
3	c_1	0,00	5,28	9,27	12,80	15,80	18,50	20,80	22,80	24,60	26,10	27,50	28,60	29,70	30,60	31,30	31,90
	c_2	0,00	4,40	7,66	10,52	13,00	15,30	17,20	18,90	20,40	21,80	22,90	24,00	24,90	25,70	26,40	27,00
4	c_1	0,00	4,88	8,87	12,40	15,40	18,10	20,40	22,40	24,20	25,70	27,10	28,20	29,30	30,20	30,90	31,50
	c_2	0,00	4,00	7,26	10,12	12,60	14,90	16,80	18,50	20,00	21,40	22,50	23,60	24,50	25,30	26,00	26,60
5	c_1	0,00	4,98	8,97	12,50	15,50	18,20	20,50	22,50	24,30	25,80	27,20	28,30	29,40	30,30	31,00	31,60
	c_2	0,00	4,10	7,36	10,22	12,70	15,00	16,90	18,60	20,10	21,50	22,60	23,70	24,60	25,40	26,10	26,70
6	c_1	0,00	5,18	9,17	12,70	15,70	18,40	20,70	22,70	24,50	26,00	27,40	28,50	29,60	30,50	31,20	31,80
	c_2	0,00	4,30	7,56	10,42	12,90	15,20	17,10	18,80	20,30	21,70	22,80	23,90	24,80	25,60	26,30	26,90
7	c_1	0,00	5,58	9,57	13,10	16,10	18,80	21,10	23,10	24,90	26,40	27,80	28,90	30,00	30,90	31,60	32,20
	c_2	0,00	4,70	7,96	10,82	13,30	15,60	17,50	19,20	20,70	22,10	23,20	24,30	25,20	26,00	26,70	27,30
8	c_1	0,00	5,69	9,68	13,21	16,21	18,91	21,21	23,21	25,01	26,51	27,91	29,01	30,11	31,01	31,71	32,31
	c_2	0,00	4,81	8,07	10,93	13,41	15,71	17,61	19,31	20,81	22,21	23,31	24,41	25,31	26,11	26,81	27,41
9	c_1	0,00	5,80	9,79	13,32	16,32	19,02	21,32	23,32	25,12	26,62	28,02	29,12	30,22	31,12	31,82	32,42
	c_2	0,00	4,92	8,18	11,04	13,52	15,82	17,72	19,42	20,92	22,32	23,42	24,52	25,42	26,22	26,92	27,52
10	c_1	0,00	6,70	10,69	14,22	17,22	19,92	22,22	24,22	26,02	27,52	28,92	30,02	31,12	32,02	32,72	33,32
	c_2	0,00	5,82	9,08	11,94	14,42	16,72	18,62	20,32	21,82	23,22	24,32	25,42	26,32	27,12	27,82	28,42
11	c_1	0,00	6,98	10,97	14,50	17,50	20,20	22,50	24,50	26,30	27,80	29,20	30,30	31,40	32,30	33,00	33,60
	c_2	0,00	6,10	9,36	12,22	14,70	17,00	18,90	20,60	22,10	23,50	24,60	25,70	26,60	27,40	28,10	28,70
12	c_1	0,00	7,05	11,04	14,57	17,57	20,27	22,57	24,57	26,37	27,87	29,27	30,37	31,47	32,37	33,07	33,67
	c_2	0,00	6,17	9,43	12,29	14,77	17,07	18,97	20,67	22,17	23,57	24,67	25,77	26,67	27,47	28,17	28,77
13	c_1	0,00	7,48	11,47	15,00	18,00	20,70	23,00	25,00	26,80	28,30	29,70	30,80	31,90	32,80	33,50	34,10
	c_2	0,00	6,60	9,86	12,72	15,20	17,50	19,40	21,10	22,60	24,00	25,10	26,20	27,10	27,90	28,60	29,20
14	c_1	0,00	7,68	11,67	15,20	18,20	20,90	23,20	25,20	27,00	28,50	29,90	31,00	32,10	33,00	33,70	34,30
	c_2	0,00	6,80	10,06	12,92	15,40	17,70	19,60	21,30	22,80	24,20	25,30	26,40	27,30	28,10	28,80	29,40

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Методы обобщения результатов эксперимента. Теория подобия

Цель работы: изучить методы обработки экспериментальных данных методами теории подобия.

Задачи работы:

1. Изучить основные положения теории подобия.
2. Уяснить физический смысл основных критериев подобия.
3. Научиться решать инженерные задачи с помощью теории подобия.

Теоретическая часть

Недостаток экспериментального метода состоит в ограниченном характере получаемой с его помощью информации. Она относится к той конкретной ситуации, в которой эксперимент проводился, и не может непосредственно использоваться там, где внешние условия уже изменились (изменились, например, пространственные или временные интервалы, характеризующие явление). При опытном исследовании каждое явление служит самостоятельным объектом экспериментов, что увеличивает их число и стоимость проведения. Эта особенность экспериментального подхода становится особенно неприятной при организации массовых опытов во время разработки новых технологий и машин, их реализующих.

Дополнение экспериментальных исследований аппаратом обобщения единичного опыта даёт средство решения многих практических задач, а служит этому, так называемая, *теория подобия*. Значение теории подобия состоит в том, что она сводит огромное многообразие ситуаций, встречающихся на практике, к небольшому числу стандартных схем, которые можно изучить детально раз и навсегда. Решая эту проблему, теория подобия соединяет в себе достоинства математики, исследующей в своих уравнениях целые классы схожих явлений, и экспериментального подхода с конкретностью его результатов.

В теории подобия вводится понятие группы подобных между собою явлений. Группа объединяет те явления, на которые возможно распространение результатов единичного опыта. Два явления считаются подобными, если они описываются одинаковыми уравнениями и имеют схожие условия однозначности (характеристики формы, начальные, граничные условия и т.п.).

Множество факторов, определяющих протекание таких явлений, может быть свёрнуто в одну характеристику. Объясняется это тем, что влияние отдельных факторов проявляется не порознь, а совместно, и рассматривать их можно также не порознь, а объединяя в своеобразные комплексы. Эти комплексы играют далее роль новых (обобщенных) переменных. Сформулировав задачу в таких переменных можно исследовать уже не единичный случай, а группу подобных явлений.

Упомянутые выше комплексы называют *критериями* (или *числами*) *подобия*. Критерии подобия имеют безразмерный характер, однако сохраняют определённый физический смысл. Обозначаются они обычно двумя первыми буквами фамилий учёных, внёсших наибольший вклад в развитие соответствующей отрасли знания.

При использовании обобщенных переменных физическое подобие определяется следующим требованием: критерии подобия подобных явлений должны иметь одинаковые значения. Позволяет это рассматривать подобные процессы как один и тот же процесс, но взятый в различном масштабе.

Многие критерии подобия содержат среди своих параметров *определяющий размер*. В качестве такового выбирается один из характерных для данного объекта размеров: толщина продукта, высота стенки, диаметр изделия, радиус кривизны трубы и т.п.

Перейдём к рассмотрению наиболее характерных критериев подобия. Поскольку при исследовании и реализации пищевых производств основную роль играют процессы тепло- и массообмена, рассмотрим вначале критерии, характеризующие эти процессы.

Критерий Фурье

$$Fo = \frac{a\tau}{l^2},$$

где a – коэффициент температуропроводности в m^2/c ; τ время в c ; l – характерный размер тела в m .

Критерий Фурье содержит время, поэтому он появляется при исследовании нестационарных задач. Здесь он даёт возможность сопоставления во времени температурных и концентрационных полей и играет роль независимой переменной (обобщенного времени).

Критерий Био

$$Bi = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot l,$$

где α – коэффициент теплообмена между жидкостью и твёрдым телом (коэффициент теплопередачи) в $Вт/(m^2 \cdot K)$; λ – коэффициент теплопроводности материала твердого тела в $Вт/(m \cdot K)$; l – характерный размер тела в m .

Этот критерий возникает в граничных условиях, описывающих теплообмен между жидкостью и твёрдым телом. Здесь он устанавливает связь между температурным полем в твёрдом теле и условиями теплоотдачи на его поверхности. Однако, трактуют его и иначе: как меру отношения внутреннего для твёрдого тела (l/λ) и внешнего ($1/\alpha$) тепловых сопротивлений.

Критерий Рейнольдса

$$Re = \frac{vl}{\nu},$$

где v – скорость движения жидкости в m/c ; ν – кинематическая вязкость жидкости в m^2/c ; l – характерный размер в m .

Критерий Рейнольдса учитывает перемешивание частиц жидкости, обусловленное движением молекул. Он возник в гидродинамике и характеризует отношение сил инерции движущейся жидкости к силам вязкости.

Течение жидкости может быть ламинарным или турбулентным. Оно может переходить из одного вида в другой, а по величине критерия Рейнольдса можно судить о характере течения. До значения $Re = 2300$, называемого критическим значением критерия Рейнольдса, течение сохраняет устойчивый ламинарный характер. При более высоких значениях критерия Re течение может приобретать турбулентный характер, а начиная с $Re = 10^4$ турбулентность становится стабильной. Оба вида течения существенно отличаются друг от друга и подчиняются различным законам гидродинамики и теплопередачи. Поэтому при исследовании задач, связанных с обтеканием продукта жидкостью или газовой смесью, этот критерий необходимо учитывать и определять его численное значение в первую очередь.

Критерий Нуссельта

$$Nu = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda},$$

где α – коэффициент теплоотдачи в $Вт/(m^2 \cdot K)$; λ – коэффициент теплопроводности жидкости в $Вт/(m \cdot K)$; l – характерный размер в m .

Этот критерий называют ещё критерием теплоотдачи. Он характеризует теплообмен на границе между твёрдым телом и жидкостью, а внешне напоминает критерий Био. Однако между критериями Био и Нуссельта есть большое различие. В критерий Bi входит

коэффициент теплопроводности твердого тела; критерий же Nu содержит коэффициент теплопроводности жидкости. В критерии Bi коэффициент теплопроводности является величиной заданной; в критерии Nu это величина искомая.

Критерий Прандтля

$$Pr = \frac{\nu}{a},$$

где ν – кинематическая вязкость жидкости в m^2/c ; λ – коэффициент теплопроводности в $Вт / (м \cdot К)$.

Критерий Pr сильно зависит от температуры. Как правило, при увеличении температуры он резко уменьшается.

Существует значительное количество других критериев подобия. Каждый из них возникает в процессе преобразования математических моделей переноса, записанных в форме дифференциальных уравнений. Размерности величин, составляющих критерии, подбираются так, чтобы результат получался безразмерным. Критерии от системы единиц уже не зависят и их легко сопоставлять.

Например, два течения, имеющие одинаковые критерии Рейнолдса, считаются подобными. Но одно и то же значение Re может быть получено по-разному. Поэтому два течения, одно из которых имеет скорость в 6 раз большую, чем другое, будут подобны, если течение с большей скоростью реализуется в трубе, имеющей в 6 раз меньший диаметр. Другой случай подобия возникает, когда со скоростью в 6 раз большей течёт в 6 раз более вязкая жидкость. Это позволяет переносить результаты исследований, полученные для одних систем, на другие.

Чтобы изучить, например, сопротивление трения в больших трубопроводах достаточно исследовать течение на малой лабораторной модели с применением другой жидкости. Вязкости и скорости следует подбирать соответствующим образом: в экспериментальной установке значение Re должно быть таким же, как в натурном исполнении. Это даёт возможность не только охватить в одном эксперименте множество случаев, но и переносить результаты исследования из одной области в другую.

Практическая часть

Пример 1. Мармелад в форме пластины длиной $l = 2$ м и шириной $d = 1,5$ м охлаждается в продольно набегающем потоке воздуха (рис. 1). Скорость и температура набегающего потока соответственно равны: $v = 3$ м/с, $t_0 = 20$ °С. Температура поверхностей пластины $t_n = 90$ °С.

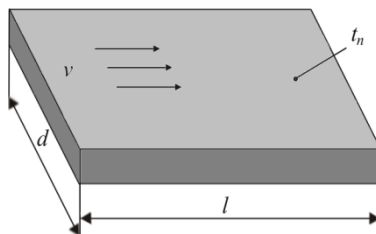


Рис. 1. Положение охлаждаемой пластины в набегающем потоке воздуха

Определить коэффициент теплоотдачи α и количество тепла, отдаваемого пластиной воздуху. Использовать критериальное уравнение

$$Nu = 0,67 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}.$$

Физические параметры при температуре $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ для воздуха имеют следующий вид:
 $\nu = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^2/\text{с)}$, $\lambda = 2,590 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м}^2 \text{ К)}$, $\text{Pr} = 0,703$.

Решение. Вычислим вначале величину критерия Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{vl}{\nu} = \frac{3 \cdot 2}{15,06 \cdot 10^{-6}} = 3,98 \cdot 10^5.$$

Из уравнения, связывающего критерий Nu с критериями Re и Pr, находим, что

$$\text{Nu} = 0,67 \sqrt{3,98 \cdot 10^5} \cdot \sqrt[3]{0,703} = 375.$$

Коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{\lambda}{l} \text{Nu} = \frac{2,59 \cdot 10^{-2}}{2} \cdot 375 = 4,86 \text{ Вт/(м}^2 \text{ К)}.$$

Количество тепла, отдаваемого пластиной воздуху, вследствие малой её толщины, определим как тепло, отдаваемое только верхней и нижней её поверхностями, по формуле:

$$Q = \alpha(t_n - t_0)S,$$

где Q - количество тепла, отдаваемого продуктом воздуху в единицу времени; S - суммарная площадь поверхностей пластины. Имеем окончательно

$$Q = 4,86(90 - 20) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1,5 = 2041 \text{ (Вт)}.$$

Задание 1 Мармелад в форме пластины длиной l и шириной d охлаждается в продольно набегающем потоке воздуха (рис. 1). Известны скорость ν и температура t_0 набегающего потока и температура поверхностей пластины t_n .

Определить коэффициент теплоотдачи α и количество тепла, отдаваемого пластиной воздуху. Использовать критериальное уравнение $\text{Nu} = 0,67 \text{Re}^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}}$.

Варианты для задания 1

Параметры охлаждающего воздуха для всех вариантов: температура $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$; $\nu = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\lambda = 2,590 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м}^2 \text{ К)}$; $\text{Pr} = 0,703$.

№ варианта	Длина пластины l , м	Ширина пластины d , м	Температура пластины t_n , $^\circ\text{C}$	Скорость охлаждающего воздуха ν , м/с	Температура охлаждающего воздуха t_0 , $^\circ\text{C}$
1	1,5	0,4	75	2,5	20
2	1,6	0,5	85	2,5	20
3	1,7	0,6	95	2,5	20
4	1,8	0,7	70	2,5	20
5	1,9	0,8	65	2,5	20
6	2,2	0,9	60	2,5	20
7	2,3	1,10	55	2,5	20
8	2,4	1,2	75	2,5	20
9	2,5	1,3	85	2,5	20
10	1,4	1,4	80	2,5	20
11	1,3	1,5	70	2,5	20
12	1,2	1,6	65	2,5	20
13	1,1	1,7	60	2,5	20
14	2,6	1,8	80	2,5	20
15	2,7	1,9	90	2,5	20

Пример 2. Опытным путём необходимо найти распределение температуры в колбасном изделии диаметром $d=2 \text{ см}$ через $\tau=0,3$ часа после загрузки изделия в камеру горячего копчения. Известно, что для этого вида колбасы коэффициент теплопроводности $\lambda = 0,31 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, коэффициент температуропроводности $a = 1,01 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$, коэффициент теплоотдачи $\alpha = 1,12 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Из-за трудностей экспериментального характера, связанных с определением температурного распределения в тонком продукте, было решено про-

вести исследования на геометрически подобной колбасной модели. Модель состоит из сырых мелких опилок, заключённых в такую же оболочку, как и образец. Модель имеет следующие физические характеристики: $\lambda_1 = 1,13 \text{ Вт/ (м} \cdot \text{К)}$, $a_1 = 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$, $\alpha_1 = 0,53 \text{ Вт/ (м}^2 \cdot \text{К)}$.

Определить необходимый диаметр колбасной модели d_1 и промежуток времени τ_1 , по истечении которого после загрузки модели в коптильную камеру необходимо измерить внутри модели распределение температур.

Решение. Подобие температурных полей возникает при одинаковых значениях критериев Био и Фурье. В качестве определяющего размера, фигурирующего в этих критериях, примем радиус цилиндра r .

Для образца указанные критерии равны:

$$Bi = \frac{\alpha \cdot r}{\lambda} = \frac{1,12 \cdot 0,01}{0,31} = 0,0361,$$

$$Fo = \frac{a \cdot \tau}{r^2} = \frac{1,01 \cdot 10^{-8} \cdot 1080}{10^{-4}} = 0,109$$

Из условия $Bi_1 = Bi$ находим диаметр модели:

$$d_1 = 2r_1 = 2 \frac{\lambda_1}{\alpha_1} Bi = 2 \frac{1,13}{0,53} 0,0361 = 0,154 \text{ (м)}.$$

Из условия $Fo_1 = Fo$ находим искомый промежуток времени:

$$\tau_1 = \frac{r_1^2}{a_1} Fo; \tau_1 = \frac{0,077^2}{1,5 \cdot 10^{-8}} \cdot 1,09 \cdot 10^{-1} = 43084 \text{ с}$$

Отсюда следует, что диаметр модели составляет 15,4 см, а время выдержки $\tau_1 = 718 \text{ мин}$.

Задание 2 Опытным путём необходимо найти распределение температуры в колбасном изделии диаметром d через время τ после загрузки изделия в камеру горячего копчения. Для этого вида колбасного изделия известны коэффициент теплопроводности λ , коэффициент температуропроводности a , коэффициент теплоотдачи α . Исследования провести на геометрически подобной колбасной модели. Модель состоит из сырых мелких опилок, заключённых в такую же оболочку, как и образец. Для модели известны коэффициент теплопроводности λ_1 , коэффициент температуропроводности a_1 , коэффициент теплоотдачи α_1 .

Варианты для задания 2

№ варианта	Диаметр d , см	Время τ , час	Коэффициент теплопроводности колбасы λ , $\text{Вт/ (м} \cdot \text{К)}$,	Коэффициент температуропроводности колбасы a , $\text{м}^2/\text{с}$	Коэффициент теплоотдачи при обработке колбасы α , $\text{Вт/ (м}^2 \cdot \text{К)}$	Коэффициент теплопроводности модели λ_1 , $\text{Вт/ (м} \cdot \text{К)}$,	Коэффициент температуропроводности модели a_1 , $\text{м}^2/\text{с}$	Коэффициент теплоотдачи при обработке модели α_1 , $\text{Вт/ (м}^2 \cdot \text{К)}$
1	1,5	0,2	0,35	$1,1 \cdot 10^{-8}$	1,01	1,1	$1,21 \cdot 10^{-8}$	0,43
2	1,6	0,4	0,45	$1,05 \cdot 10^{-8}$	1,04	1,2	$1,25 \cdot 10^{-8}$	0,53
3	1,7	0,5	0,55	$1,06 \cdot 10^{-8}$	1,05	1,3	$1,26 \cdot 10^{-8}$	0,63
4	1,8	0,6	0,50	$1,07 \cdot 10^{-8}$	1,01	1,4	$1,27 \cdot 10^{-8}$	0,75
5	1,9	0,7	0,35	$1,08 \cdot 10^{-8}$	1,04	1,5	$1,28 \cdot 10^{-8}$	0,85
6	2,0	0,8	0,45	$1,09 \cdot 10^{-8}$	1,05	1,7	$1,29 \cdot 10^{-8}$	0,95
7	2,1	0,9	0,55	$1,1 \cdot 10^{-8}$	1,01	1,6	$1,21 \cdot 10^{-8}$	0,33
8	2,2	1	0,50	$1,01 \cdot 10^{-8}$	1,04	1,8	$1,21 \cdot 10^{-8}$	0,25
10	2,3	0,35	0,35	$1,02 \cdot 10^{-8}$	1,05	1,9	$1,22 \cdot 10^{-8}$	0,15
11	2,4	0,45	0,45	$1,05 \cdot 10^{-8}$	1,01	1,2	$1,25 \cdot 10^{-8}$	0,73

12	2,5	0,55	0,55	$1,07 \cdot 10^{-8}$	1,04	1,4	$1,27 \cdot 10^{-8}$	0,43
13	2,6	0,65	0,50	$1,12 \cdot 10^{-8}$	1,05	1,1	$1,22 \cdot 10^{-8}$	0,53
14	2,7	0,75	0,35	$1,06 \cdot 10^{-8}$	1,01	1,2	$1,26 \cdot 10^{-8}$	0,63
15	2,8	0,85	0,45	$1,04 \cdot 10^{-8}$	1,04	1,3	$1,24 \cdot 10^{-8}$	0,75

Практическая работа № 5

Установление корреляционной зависимости между измеряемыми величинами

Цель работы: научиться применять математические расчеты для установления корреляционной зависимости между измеряемыми величинами.

Задание:

1. Определить среднее арифметическое значение физической величины из ряда равнозначных измерений.

2. Определить значение коэффициента корреляции между значениями двух физических величин.

Теоретические сведения

Функциональная зависимость между *переменными* x и y означает, что каждому значению аргумента x отвечает единственное значение функции y . Аргумент часто отождествляется с причиной, вызывающей некоторое следствие. Числовая характеристика этого следствия выражается значением функции. Такие зависимости широко используются при описании детерминированных («детерминированный» - следует единственным путём) процессов .

Однако, исследуя реальные явления, не всегда удаётся однозначно разделить причину и следствие. Следствие может вызываться одновременным действием нескольких факторов, да и сама причина может от некоторых из них зависеть. Такиими свойствами обладает, например, зависимость между длиной рыб определённого вида и их весом; зависимость между временем вылова рыбы и количеством жира в её мышцах; связь между количеством питательных веществ, подаваемых в искусственный водоём, и биомассой рыбного сырья, в нём выращиваемого и т.п. Здесь каждому значению одной переменной величины может отвечать множество возможных значений другой переменной. Благодаря этому появляется некоторое распределение этой переменной, определенным образом изменяющееся при изменении первой величины.

О таких величинах говорят, что они подвергаются случайному рассеиванию. Связи подобного вида называют корреляционными зависимостями и исследуют их методами корреляционного анализа.

Слово «корреляция» происходит от латинского слова *correlatio* - соответствие, взаимосвязь, взаимозависимость некоторых сущностей. В математической статистике этим понятием обозначается связь между явлениями, если одно из них считается причиной, определяющей другие явления, или имеются их общие причины. *Корреляционный анализ вскрывает усреднённый закон изменения рассматриваемых величин в зависимости от изменения одной из них.*

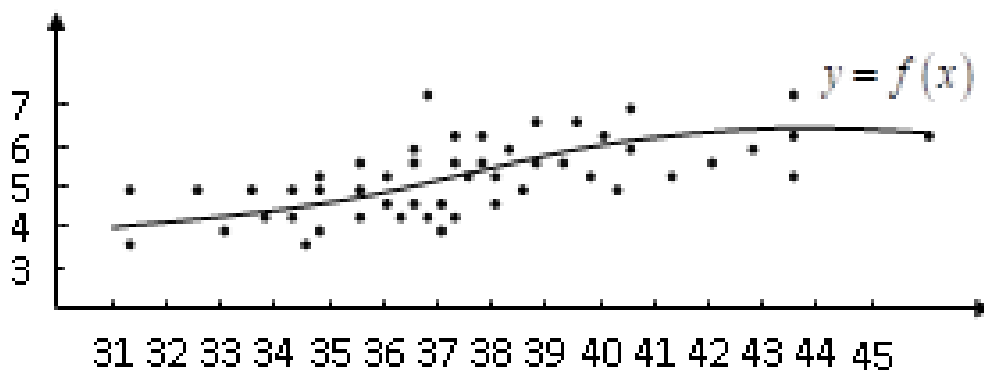


Рисунок 1. Диаграмма корреляции длины трески и её толщины

Например, из партии трески, поступившей на предприятие, отобрали 50 экземпляров рыб и измерили их длину x и толщину в миделевом сечении y . *Результаты измерений представлены на рис. 1 точками с координатами (x_i, y_i) $i = 1, 2, \dots, 50$.* Функциональная зависимость между толщиной трески и её длиной на диаграмме не просматривается (она в данном случае вообще отсутствует). Однако, известно, что с увеличением длины растёт и толщина трески. Тенденция расположения точек на диаграмме этот факт подтверждает: они размещены полосой, поднимающейся постепенно вверх. Формально это даёт возможность предположить между рассматриваемыми величинами некоторую связь.

Ставя в соответствие каждому значению x среднее из отвечающих ему значений y , мы получим функцию график которой и представлен на рис. 1. Эта функция называется *функцией регрессии y на x* , а её график - *линией регрессии y на x* . Линия регрессии y на x показывает, как величина y зависит от x в среднем. В нашем случае это есть зависимость усредненной толщины трески от её длины.

Очевидно, что вопрос можно поставить и иначе: как зависит в среднем длина трески от её толщины? Соотнося каждому значению величины y среднее значение из отвечающего ему распределения величины x , мы получили бы функцию $x = \varphi(y)$, т.е. *функцию регрессии x на y* с соответствующей линией регрессии.

Корреляционный анализ изучает усредненный закон поведения каждой из двух величин в зависимости от значений другой величины. Меру этой зависимости количественно устанавливает коэффициент корреляции (r).

Корреляция называется линейной, если обе функции регрессии $y=f(x)$ и $x=f(y)$ линейны. В этом случае мерой линейной зависимости между величинами служит коэффициент корреляции первого порядка (линейный).

Коэффициент корреляции по абсолютной величине всегда меньше или равен $-1 \leq |r| \leq 1$.

Если $r=0$, то это значит, что линейная функция отсутствует, но возможно существование нелинейной.

Чем $|r|$ ближе к 1, тем теснее линейная зависимость между y и x .

Если $|r| = 1$, то существует линейная функциональная зависимость между величинами, т.е. каждому значению одной величины соответствует точно одно значение другой величины.

О степени взаимозависимости между величинами судят по абсолютной величине коэффициента корреляции:

$ r < 0,39$	- нет корреляции
$0,40 \leq r < 0,60$	- средняя корреляция
$0,60 \leq r \leq 0,80$	- значительная корреляция
$ r > 0,80$	- высокая корреляция

Положительное значение r означает, что с увеличением одной величины, другая тоже возрастает. Отрицательное значение r означает, что с увеличением одной величины, другая уменьшается.

Коэффициент корреляции рассчитывается по формуле:

$$r = \frac{n \sum z_i \cdot \bar{x}_i - \sum z_i \cdot \sum \bar{x}_i}{\sqrt{[n \sum z_i^2 - (\sum z_i)^2] \cdot [n \sum \bar{x}_i^2 - (\sum \bar{x}_i)^2]}} \quad (1)$$

где n – число измерений.

Достоверность коэффициента корреляции t_r определяют по формуле:

$$t_r = r/m_r, \quad (2)$$

где m_r – ошибка коэффициента корреляции, которая определяется по формуле:

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{N-2}} \quad (3)$$

где N – количество элементов в выборке (количество точек измерений).

Полученное значение t_r сравнивают со стандартным значением критерия Стьюдента t_s (таблица 1). Если $t_r > t_s$, то делают вывод о том, что коэффициент кор-

реляции значим (значимо отличается от нуля), а величины X и Y коррелированы, т.е. связаны линейной зависимостью.

Таблица 1

Стандартные значения критерия Стьюдента при вероятности 0,95 и числе степеней свободы $f = N-2$

f	t_s	f	t_s
1	12,7	6-7	2,4
2	4,3	8-9	2,3
3	3,2	10-13	2,2
4	2,8	14-28	2,1
5	2,6	29 и более	2,0

Пример задания

Определить значение коэффициента корреляции двух величин и оценить его значимость.

Исходные данные

При определении энтальпии жирной рыбы в зависимости от температуры были получены следующие результаты:

T, °C	I, кДж/кг				
25	334,5	333	334	334,5	333,5
20	317,4	318,5	317,5	317,5	317,5
15	300,6	302	302,5	304	303,5
10	283,5	285	286	283,5	285
5	266,3	263,4	265	266	263
0	248	250	249	249,5	250

Выполнение работы

При выполнении работы следует использовать тот же вариант, что и в работе №3 (РГЗ).

1.

аходим средние значения параллельных опытов.

Н

Примечание: В данной работе используются средние значения \bar{x} параллельных опытов работы №3, в которых исключены грубые погрешности (промахи).

t, °C	I, кДж/кг					Средние значения \bar{x}_i
25	334,5	333	334	334,5	333,5	333,9
20	317,4	318,5	317,5	317,5	317,5	317,68
15	300,6	302	302,5	304	303,5	302,52
10	283,5	285	286	283,5	285	284,6
5	266,3	263,4	265	266	263	264,74
0	248	250	249	249,5	250	249,3

2.

С

учетом обозначений формулы (1)

$$r = \frac{n \sum z_i \cdot \bar{x}_i - \sum z_i \cdot \sum \bar{x}_i}{\sqrt{[n \sum z_i^2 - (\sum z_i)^2] \cdot [n \sum \bar{x}_i^2 - (\sum \bar{x}_i)^2]}}$$

таблица с исходными данными

принимает следующий вид. В данном примере число измерений $n = 6$.

z_i	\bar{x}_i
25	333,9
20	317,68
15	302,52
10	284,6
5	264,74
0	249,3

3.

Р

счет коэффициент корреляции r по формуле (1) удобно вести в табличной форме с помощью программы Microsoft Excel. В последней строке таблицы записываются суммы, соответствующих столбцов.

z_i	\bar{x}_i	z_i^2	\bar{x}_i^2	$z_i \cdot \bar{x}_i$
25	333,90	333,9	625	111489
20	317,68	317,68	400	100921
15	302,52	302,52	225	91518
10	284,60	284,6	100	80997
5	264,74	264,74	25	70087
0	249,3	249,3	0	62150
Σ 75	Σ 1752,74	Σ 1375	Σ 517163	Σ 23409

Коэффициент корреляции согласно (1)

$$r = \frac{(6 * 23409 - 75 * 1752,74)}{\sqrt{(6 * 1375 - 75^2) * (6 * 517163 - 1752,74^2)}} = 0,999$$

4.

О

пределим ошибку коэффициента корреляции m_r по формуле (3):

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{N-2}}$$

где N – количество элементов в выборке (количество точек измерений N , в

примере $N=6$). $m_r = \sqrt{\frac{1-0,999^2}{4}} = 0,022$

5.

Д

осторожность коэффициента корреляции t_r определяют по формуле (2):

$$t_r = r / m_r; \quad t_r = 0,999/0,022 = 45.$$

6.

П

полученное значение t_r сравнивают со стандартным значением критерия Стьюдента t_s (таблица 1). $f = N-2$; $f = 4$; $t_s = 2,8$

Т.к. $t_r > t_s$, делаем вывод о том, что коэффициент корреляции значим.

7.

В

ывод о степени взаимозависимости между величинами z_i и \bar{x}_i .

Т.к. $|r| > 0,80$, следовательно между величинами z_i и \bar{x}_i наблюдается высокая корреляция

Варианты заданий

Вариант 1

При определении выхода жира (В) в зависимости от температуры вытапливания (Т), были получены следующие результаты:

Т,	В, %				
40	51,5	51,0	52,0	51,5	52,0
50	61,5	62,0	62,0	63,0	62,5
60	76,5	77,0	76,5	76,0	76,5
70	82,0	82,05	83,0	82,0	83,0
80	85,5	86,0	85,0	86,0	81,5
90	86,5	87,0	87,0	86,5	86,0

Вариант 2

При построении калибровочного графика зависимости оптической плотности раствора от концентрации альдегидов были получены следующие результаты:

С, мг%	Д				
5	0,234	0,238	0,240	0,242	0,240
10	0,395	0,399	0,405	0,401	0,403
15	0,603	0,610	0,609	0,605	0,607
20	0,752	0,760	0,765	0,558	0,758
25	0,806	0,810	0,811	0,804	0,809
30	0,945	0,940	0,935	0,941	0,943

Вариант 3

При определении выхода соленой рыбы (В) в зависимости от концентрации соли (С) при холодном посоле сельди были получены следующие результаты

С, %			В, %		
2	110,0	108,0	108,0	109,0	108,5
4	107,0	106,0	107,0	105,5	106,0
8	100,0	98,5	98,0	101,0	99,5
12	88,0	98,5	90,0	89,0	88,5
16	83,0	83,5	72,0	83,0	84,0
20	78,0	77,0	78,5	77,5	78,5

Вариант 4

При определении выхода жира ветеринарного (В) в зависимости от концентрации карбамида (С) были получены следующие результаты:

С, %			В, %		
1	72,1	72,9	71,5	72,0	71,8
2	80,0	81,1	80,5	80,9	80,4
3	83,3	84,1	83,7	84,3	83,6
4	87,1	87,4	86,9	82,2	87,0
5	89,5	88,9	89,1	88,8	89,3
7	90,0	89,5	90,2	90,6	89,9

Вариант 5

При определении выхода жира (В) при мягком щелочном гидролизе жиросодержащего сырья В зависимости от концентрации щелочи (С) были получены следующие результаты;

С, %			В, %		
1	60,5	61,2	63,3	60,4	60,5
2	73,0	72,1	72,9	72,3	72,7
3	79,1	80,0	79,4	79,6	79,9
4	76,5	77,0	77,3	71,5	77,1
5	65,7	66,2	66,0	65,5	66,0
6	50,2	51,0	50,0	50,4	50,5

Вариант 6

При определении количества вымороженной воды (q) в треске в зависимости от температуры (t) были получены следующие результаты:

$T, ^\circ\text{C}$	q				
-1	0,080	0,085	0,085	0,090	0,080
-3	0,665	0,660	0,658	0,660	0,665
-5	0,767	0,770	0,763	0,701	0,771
-10	0,843	0,840	0,847	0,850	0,845
-15	0,874	0,873	0,870	0,875	0,877
-20	0,890	0,893	0,889	0,888	0,890

Вариант 7

При определении коэффициента теплоотдачи (a) воздуха в зависимости от скорости его движения были получены следующие результаты:

$V, \text{ м/с}$	$a, \text{ Вт/м К}$				
2	15,1	15,2	15,2	15,5	15,4
3	20,9	20,6	21,1	20,9	24,3
4	26,4	26,5	26,5	26,3	26,6
5	31,0	31,3	31,5	31,4	31,5
6	36,5	36,5	36,8	36,6	36,8
7	42,4	42,4	42,0	42,3	42,0

Вариант 8

При определении зависимости содержания соли (S) в скумбрии от времени оттаивания (τ) были получены следующие результаты:

$\tau, \text{ ч}$	$S, \%$				
0,0	13,61	13,65	13,60	13,67	13,60
1,0	11,25	11,30	11,31	11,27	11,29
1,5	9,95	9,90	9,96	9,89	9,91
2,0	8,51	8,57	8,50	8,55	8,25
2,5	8,05	8,08	8,10	8,03	8,05
3,0	7,75	7,70	7,71	7,72	7,79
4,0	7,31	7,35	7,25	7,29	7,27

Вариант 9

При определении плотности (ρ) уксусной кислоты в зависимости от концентрации (С) были получены следующие результаты:

С, %	ρ , г/см ³				
5	1,0055	1,0060	1,0058	1,0053	1,0056
15	1,0195	1,0195	1,0200	1,0190	1,0205
30	1,0383	1,0383	1,0386	1,0380	1,0450
40	1,0488	1,0480	1,0488	1,0485	1,0483
50	1,0575	1,0575	1,0570	1,0580	1,0573
60	1,0642	1,0640	1,0645	1,0642	1,0630

Вариант 10

При определении плотности тузлука (ρ) в зависимости от концентрации соли (С) температуре 20°C были получены следующие результаты:

С, %	ρ , кг/м ³				
1	1005	1006	1004	1007	1005
5	1034	1036	1032	1035	1033
10	1071	1070	1073	1075	1071
15	1100	1095	1101	1097	1099
20	1148	108	1143	1145	1147
23	1172	1170	1175	1172	1173

Вариант 11

При определении продолжительности охлаждения рыбы (τ) в зависимости от толщины (L) получены результаты:

L, мм	τ , мин				
40	85	80	83	83	80
50	110	113	111	110	125
55	135	135	133	131	134
60	160	166	164	163	162
65	200	203	201	198	200
70	230	232	232	234	233

Вариант 12

При определении прогреваемости консервов (Т) в зависимости от времени (τ) были получены результаты:

τ , мин	Т, °С				
5	14,5	14,0	15,1	14,0	14,6
10	16,0	16,0	16,5	15,5	15,0
15	20,0	20,5	20,0	21,0	20,0
20	31,0	29,0	30,0	29,0	40,0
30	60,0	56,0	58,0	58,0	59,0
40	85,0	84,0	84,0	85,0	86,0

Вариант 13

При определении буферности (F) соленой сельди в процессе хранения (τ) были получены результаты:

τ	дни	F, °				
24		78	78	75	76	76
46		90	90	92	110	92
72		130	131	132	128	130
90		155	156	156	152	155
110		173	165	156	170	170
130		184	186	185	185	183

Вариант 14

При определении растворимости воздуха (V) в воде в зависимости от температуры были получены результаты:

Т, °С	V, м ³				
0	29,13	29,22	29,20	29,20	29,20
5	26,68	28,80	26,86	26,75	26,70
10	22,84	22,80	22,80	22,80	22,86
15	20,85	22,84	22,80	22,80	22,86
20	18,68	18,60	1,64	18,20	18,60
25	17,08	17,10	17,10	17,15	17,12

Вариант 15

При определении массовой доли воды в смеси эфира с водой в зависимости от температуры (Т) были получены следующие результаты:

T, °C	W, %				
0	0,59	0,54	0,54	0,56	0,58
20	0,95	0,93	0,98	1,14	0,99
40	1,43	1,54	1,53	1,50	1,50
60	2,05	1,94	1,98	2,03	2,01
80	2,78	2,84	2,82	2,91	2,88
100	3,65	3,50	3,63	3,62	3,60

Вариант 16

При сушке материала в течение времени (τ) содержание воды (W) составило:

τ , с	W, %				
0	29,5	29,1	29,2	29,4	29,5
20	18,4	18,4	18,6	18,6	18,3
40	11,9	11,6	11,1	11,9	11,7
60	8,6	8,5	8,5	8,8	8,6
80	5,0	5,3	5,5	5,5	5,4
100	3,3	3,4	3,4	3,0	3,0

Вариант 17

При определении коэффициента теплоотдачи (а) от горизонтальной стенки к воде в зависимости от разности температуры стенки и кипящей воды были получены следующие результаты:

T, °C	A, ккал/(м ² · ч · град)				
6,1	3185	3180	3182	3190	3192
7,5	5390	5390	5470	5370	5380
8,8	6860	6866	6875	6870	6873
11,1	10045	10045	10075	10060	10065
12,2	12740	12750	12744	12740	12470

Вариант 18

При определении зависимости между атмосферным давлением (P) и барометрической высотой (H) была получена зависимость:

H, км	P, мм рт.ст.				
0	760	763	761	760	785
1	675	675	673	671	674
2	598	600	595	590	595
4	466	450	482	466	460
5	410	412	410	414	416
6	360	366	366	368	370

Вариант 19

При определении растворимости (P) натриевой соли хлорноватистой кислоты в воде в зависимости от температуры воды были получены следующие результаты

P, г/100 г	T, °C				
10	5,0	5,1	5,1	5,3	5,5
20	7,3	7,9	7,9	8,1	7,8
30	10,5	10,5	10,8	10,6	10,8
40	14,0	14,0	14,3	14,5	14,8
50	19,3	19,4	19,4	19,0	19,2
60	24,3	24,1	24,0	24,9	23,9

Вариант 20

При определении зависимости между количеством раствора (Y) уносимого из выпарного аппарата, и его производительностью (X) были получены следующие результаты:

X, кг/ч	Y, %				
250	0,10	1,12	0,17	0,13	0,14
500	0,28	0,25	0,30	0,27	0,25
900	0,80	0,85	0,85	0,82	0,83
1200	1,38	1,44	1,40	1,65	1,39
1600	2,56	2,50	2,48	2,50	2,52
2000	4,10	4,35	4,20	4,20	4,15

Вариант 21

При определении количества вымороженной воды в пикше в зависимости от температуры были получены следующие результаты

T, °C	q, %				
-1	9,7	9,6	9,9	9,6	9,5
-5	79,5	80,0	79,0	80,0	75,0
-10	86,7	86,4	86,5	85,4	86,6
-15	89,2	89,0	89,6	89,4	89,0
-20	90,6	90,1	92,7	90,4	91,0
-30	92,2	92,2	92,4	92,7	92,5

Вариант 22

При определении холодопроизводительности льдосолевой смеси в зависимости от количества соли, смешанной со льдом, были получены следующие результаты

X, %	Q, кДж/кг				
2	334,9	335,6	334,6	334,5	335,6
4	326,6	325,0	324,5	324,0	324,5
6	322,4	324,0	322,0	324,0	323,5
8	318,2	323,0	317,5	317,0	317,5
10	314,0	310,0	311,0	310,5	325,0
12	301,4	302,8	302,0	301,6	302,0

Вариант 23

При определении температуры тела рыбы в зависимости от продолжительности размораживания были получены результаты:

τ , ч	T, °C				
0	-20,5	-20,0	-20,0	-20,5	-20,0
1	-12,5	-11,8	-11,1	-12,8	-21,5
2	-5,0	-5,0	-5,5	-5,5	-5,5
3	-4,5	-4,0	-4,8	-4,0	-4,6
4	-3,8	-3,9	-3,6	-3,6	-5,3
6	-2,5	-2,0	-2,0	-2,0	-2,5

Вариант 24

При определении энтальпии жирной рыбы в зависимости от температуры были получены следующие результаты:

T, °C	I, кДж/кг				
25	334,5	333,0	334,0	334,5	340,0
20	317,4	318,5	317,5	317,5	317,5
15	300,6	345,0	302,5	304,0	305,0
10	283,5	285,0	286,0	283,5	285,0
5	266,3	263,4	265,0	266,0	263,0
0	248,0	250,0	249,0	249,5	250,0

Вариант 25

При определении энтальпии тощей рыбы в зависимости от температуры были получены следующие результаты:

T, °C	I, кДж/кг				
25	258,0	260,0	355,0	360,0	355,0
20	336,2	345,0	330,0	333,5	335,0
15	300,6	295,0	303,5	302,0	303,5
10	301,0	302,5	300,5	303,5	302,0
5	283,0	286,5	284,0	285,0	286,0
-1	212,3	213,0	212,5	213,6	212,0